Ejercicios resueltos de Combinatoria

30 de diciembre de 2010

1. Principios básicos

1. **¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6, cuyas cifras sean todas distintas?**

   No consideramos al 0 como un elemento del conjunto de los números naturales. Un número natural no puede comenzar por 0. Los números naturales menores de 10^6 son todos aquellos que tienen como máximo 6 cifras.

   - Todos los números naturales con una única cifra cumplen la condición de que sus cifras sean distintas: $|A_1| = 9$.
   - Con dos cifras tenemos: $|A_2| = 9 \cdot V_{9,1} = 9 \cdot 9 = 81$.
   - Con tres cifras: $|A_3| = 9 \cdot V_{9,2} = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.
   - Con cuatro cifras: $|A_4| = 9 \cdot V_{9,3} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4,536$.
   - Con cinco cifras: $|A_5| = 9 \cdot V_{9,3} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 27,216$.
   - Y con seis cifras: $|A_6| = 9 \cdot V_{9,4} = 9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 136,080$.

   Luego en total tenemos $\sum_{i=1}^{6} |A_i| = \sum_{i=1}^{6} 9 \cdot V_{9,i-1} = 168,570$.

2. **Las placas de matrícula de los vehículos de un cierto país constan de 4 letras seguidas de 3 números. ¿Cuántas placas distintas pueden formarse?**

   Consideramos que el alfabeto utilizado no dispone de la letra ñ, y por lo tanto está compuesto por 26 letras distintas. Suponemos que tanto las letras como los números pueden repetirse en una placa de matrícula. Suponemos también que los números de las placas de matrículas pueden comenzar por ceros, pudiendo ser todos 0.

   - $|A_1| = VR_{26,4} = 26^4$.
   - $|A_2| = VR_{10,4} = 10^3$.

   El número total de placas es $|A_1| \cdot |A_2| = 26^4 \cdot 10^3 = 456,976,000$.

3. **¿Cuántos números naturales existen menores que 10^6 que no sean capicúas?**

   Consideramos que un número es capicúa si al invertir el orden de sus cifras obtenemos el mismo número, es decir, si leemos el mismo número leyendo de izquierda a derecha y de derecha a izquierda. Consideramos que los números naturales de una cifra son todos capicúa. No consideramos al 0 como un elemento del conjunto de los números naturales.

   - Números capicúa de una cifra $A_1 = \{1, 2, 3, ..., 9\}$: $|A_1| = 9$.
   - Números capicúa de dos cifras $A_2 = \{11, 22, 33, ..., 99\}$: $|A_2| = |A_1| = 9$.
   - Números capicúa de tres cifras: $|A_3| = 9 \cdot 10 = 90$.
   - Números capicúa de cuatro cifras: $|A_4| = |A_3| = 90$.

- Números capicúa de cinco cifras: $|A_5| = 9 \cdot VR_{10,2} = 9 \cdot 10 \cdot 10 = 900$.
- Números capicúa de seis cifras: $|A_6| = |A_5| = 900$.

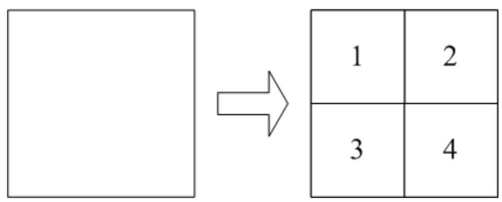
En total tenemos $\sum_{i=1}^{6} |A_i| = 2 \cdot (9 + 90 + 900) = 1,998$ números capicúa menores de 10^6, por lo que el total de números naturales que no son capícua es: $999,999 - 1,998 = 998,001$.

4. **¿Cuántos enteros m del 1 al 1000 no son divisibles por 3?**

   Sabemos que cada tres números consecutivos hay un múltiplo de tres, luego hay $\left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333$ mútiplos de 3; y por lo tanto el número de enteros del 1 al 1000 que no son divisibles por 3 es: $1000 - 333 = 664$.

5. **Demuestra que si se eligen 5 puntos cualesquiera en un cuadrado de lado 2, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a $\sqrt{2}$.**

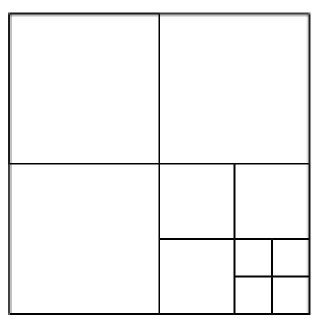
   Dividimos el cuadrado original de lado 2 en 4 cuadrados idénticos de lado 1. Por el principio de las cajas, si repartimos 5 puntos cualesquiera dentro del cuadrado original sabemos que uno de los 4 cuadrados de lado 1 debe contener al menos 2 puntos.

   En un cuadrado de lado ℓ, la distancia máxima entre dos puntos situados dentro del cuadrado se alcanza cuando dichos puntos se encuentran en vértices opuestos del cuadrado, en cuyo caso la distancia d entre ambos puntos vale $d^2 = \ell^2 + \ell^2 = 2 \cdot \ell^2 \Rightarrow d = \ell \cdot \sqrt{2}$.

6. **¿Cuántos puntos han de elegirse en un cuadrado de lado 2 para asegurar que al menos 2 de ellos estarán a una distancia no superior a $\sqrt{2}/n$?**

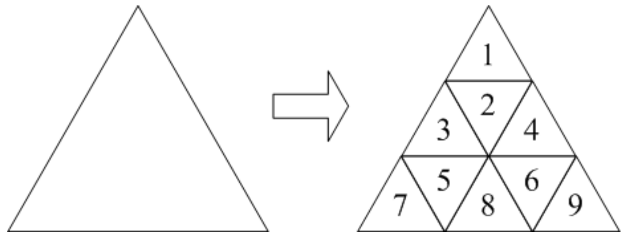
   Siguiendo el razonamiento inverso al planteado en el ejercicio anterior. Para que dos puntos dentro de un cuadrado se encuentren a una distancia no superior a $\sqrt{2}/n$ dicho cuadrado debe tener un lado de tamaño $1/n$, luego debemos dividir el cuadrado inicial de lado 2 en $2n \cdot 2n = 4n^2$ cuadrados de lado $1/n$.

   Por lo tanto, para poder asegurar que al menos dos puntos se encuentre a una distancia no superior a la indicada, debemos tener al menos $4n^2 + 1$ puntos.

7. **Demuestra que si se eligen 10 puntos cualesquiera en un triángulo equilátero de lado 1, al menos dos de ellos se encuentran a una distancia no superior a 1/3.**

   Un triángulo equilatero de lado 1 puede descomponerse en 9 triángulos equilateros de lado 1/3 como muestra la figura X.



Por el principio de la caja, si repartimos 10 puntos cualesquiera dentro del triángulo original sabemos que uno de los 9 triángulos de lado 1/3 debe contener al menos 2 puntos.

En un triángulo equilatero de lado ℓ, la distancia máxima entre dos puntos situados dentro del triángulo se alcanza cuando dichos puntos se encuentran en dos vértices distintos del triángulo, en cuyo caso la distancia entre ambos puntos vale ℓ.

8. **¿Cuál es el mínimo número de estudiantes que debe tener la clase de Matemática Discreta para estar seguros que al menos 6 estudiantes recibirán la misma nota? (Se supone que sólo hay puntuaciones enteras).**

   Suponemos que las puntuaciones posibles son $A_1 = \{0, 1, 2, ..., 10\}$: $|A_1| = 11$. En este conjunto de 11 cajas diferentes tenemos que distribuir las calificaciones de los n alumnos (objetos) de forma que según el principio de las cajas $\left\lceil \frac{n}{11} \right\rceil = 6$

   Con 11 posibles puntuaciones necesitamos un total de $11 \cdot 5 = 55$ alumnos para que en el "peor" de los casos todas las puntuaciones hayan sido obtenidas por exactamente 5 alumnos. En este punto, un alumno adicional asegurará que con $n = 55 + 1 = 56$ alumnos al menos una puntuación ha tenido que ser obtenida por 6 alumnos.

9. **Calcula el número de divisores de $112,000$. ¿Cuántos son impares?**

   $112,000 = 2^7 \cdot 5^3 \cdot 7$.

   Si d es un divisor de $112,000$ entonces $d = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma$ con $(\alpha, \beta, \gamma) \in A_1 \times A_2 \times A_3$,donde los conjuntos

   $A_1 = \{0, 1, 2, .., 7\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_3 = \{0, 1\}$. Por tanto el nº de divisores de $112,000$ es $|A_1 \times A_2 \times A_3| = 8 \cdot 4 \cdot 2$.

   Si $d = 2^\alpha \cdot 5^\beta \cdot 7^\gamma$ es impar no puede ser múltiplo de 2, por lo que $\alpha = 0$ y $d = 5^\beta \cdot 7^\gamma$ con $(\beta, \gamma) \in A_2 \times A_3$,

   En total el número de dividores impares es $|A_2 \times A_3| = 4 \cdot 2 = 8$.

10. **¿Cuántos divisores positivos tiene el número $29338848000 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11$? ¿Cuántos son múltiplos de 99? ¿Cuántos son múltiplos de 39?**

    Si d es un divisor de $29338848000 = 2^8 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^3 \cdot 11$ entonces $d = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ con $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5) \in A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$,donde los conjuntos

    $A_1 = \{0, 1, 2, .., 8\}$, $A_2 = \{0, 1, 2, ., 5\}$, $A_3 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_4 = \{0, 1, 2, 3\}$, $A_5 = \{0, 1\}$. Por tanto el nº de divisores de 29338848000 es $|A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5| = 9 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2$.

    Si $d = 2^{\alpha_1} \cdot 3^{\alpha_2} \cdot 5^{\alpha_3} \cdot 7^{\alpha_4} \cdot 11^{\alpha_5}$ es múltiplo de 99, entonces $\alpha_2 \geq 2$ y $\alpha_5 = 1$, en total el número de dividores múltiplo de 99 es $|A_1 \times (A_2 - \{0, 1\}) \times A_3 \times A_4 \times A_5 - \{0\}| = 9 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 1$.

    $39 = 3 \times 13$ no es divisor de 29338848000, **por tanto la respuesta es** cero.

11. **¿Cuántos números de tres cifras distintas tienen todas ellas impares?, ¿y pares?**

    Consideramos el 0 como una cifra par, pero suponemos que un número con cifras pares no puede comenzar por 0. El conjunto de las cifras pares $A_p = \{0, 2, 4, 6, 8\}$, $|A_p| = 5$. El conjunto de las cifras impares $A_n = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $|A_n| = 5$.

    - Números de tres cifras, distintas, y todas ellas impares: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

- Números de tres cifras, distintas, y todas ellas pares: $\underline{4 \cdot V_{4,2}} = 4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$.

12. **Se extraen, con reemplazamiento y ordenadamente, cinco cartas de una baraja. ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey? ¿En cuántas extracciones hay al menos un rey o un as?**

    Suponemos que la baraja se compone de 40 cartas, divididas en 4 palos distintos, y 10 Está claro que el resultado de las cinco extracciones es una 5-lista con repetición. La siguiente es un ejemplo de resultado:

    $$\underset{1^{\text{a}}\text{extracción}}{\underline{\text{As de copas,}}} \quad \underset{2^{\text{a}}\text{extracción}}{\underline{\text{As de copas,}}} \quad \underset{3^{\text{a}}\text{extracción}}{\underline{\text{2 de espadas,}}} \quad \underset{4^{\text{a}}\text{extracción}}{\underline{\text{2 de espadas,}}} \quad \underset{5^{\text{a}}\text{extracción}}{\underline{\text{As de copas}}}$$

    Definimos los conjuntos:

    $R_1 = \{$ Todas las 5-listas con repetición de cartas de una baraja española con al menos un rey$\}$,

    $R_2 = \{$ Todas las 5-listas con repetición de cartas de una baraja española con al menos un rey o un as$\}$,

    $X = \{$ Todas las 5-lista con repetición de cartas de una baraja española$\}$,

    $A_1 = \{$ Todas las 5-lista con repetición de cartas de una baraja española sin ningún rey $\}$ y

    $A_2 = \{$ Todas las 5-lista con repetición de cartas de una baraja española sin reyes ni ases $\}$

    Entonces, por el principio del complementario:

    $$|R_1| = |X| - |A_1| = 40^5 - 36^5 \quad \text{y} \quad |R_2| = |X| - |A_2| = 40^5 - 32^5$$

13. **Demuestra que en un conjunto de 12 enteros existen dos cuya diferencia es divisible por 11. ¿Es cierto si cambiamos diferencia por suma?**

    Construimos el conjunto cociente Z_{11} de Z respecto a la relación de congruencia módulo 11 (o conjunto de menores residuos no negativos), formado por las cajas: $Z_{11} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, ..., \overline{10}\}$.

    Por el principio de las cajas, sabemos que si elegimos un conjunto de 12 enteros en al menos una de las cajas debe haber al menos dos enteros, a y b tal que $\overline{a} = \overline{b}$ en Z_{11}, esto significa, por definición, que $a-b$ es divisible por 11.

    Esto no siempre es cierto para la suma puesto que si los 12 enteros son de la misma clase y distinta de $\overline{0}$, por ejemplo todos de la clase de $\overline{1}$ ($\{11 \cdot q + 1$ con $q \in \{0, 1, 2, ..., 10\}\}$),la suma de dos cualesquiera de ellos da de resto 2 al dividir por 11.

14. **Se eligen $n+1$ enteros positivos en el conjunto $\{1, 2, 3, ..., 3n\}$. Demuestra que existen dos cuya diferencia es menor o igual que 2.**

    Suponemos que tenemos n cajas en las que agrupamos de forma ordenada tres enteros positivos consecutivos. Puesto que trabajamos con un conjunto total que contiene $3n$ enteros, podemos considerar cada una de las n cajas de de la siguiente forma:

    - La primera caja puede contener los 3 primeros enteros, $C_1 \in \{1, 2, 3\}$.
    - La segunda caja puede contener los 3 enteros siguientes, $C_2 \in \{4, 5, 6\}$.
    - La tercera caja puede contener los enteros, $C_3 \in \{7, 8, 9\}$.
    - ...
    - Y la última caja podrá contener los enteros, $C_n \in \{3n-2, 3n-1, 3n\}$.

    Si **se eligen $n+1$ enteros, dos tienen que ser de la misma caja. Además** la diferencia entre dos enteros de una misma caja es ≤ 2.

15. **Se han de pintar las habitaciones de la casa que se muestra en la figura, de forma que las habitaciones que están conectadas por una puerta tengan colores distintos. ¿De cuántas maneras puede pintarse si se dispone de n colores?**

Cada configuración de colores es una lista de longitud cuatro como por ejemplo la (1,2,3,1) donde:

$$\underbrace{1}_{Color\ en\ A}\quad\underbrace{2}_{Color\ en\ B}\quad\underbrace{3}_{Color\ en\ C}\quad\underbrace{1}_{Color\ en\ D}$$

Si empenzamos a pintar en orden , tendremos un total de $n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-1)$

$$\underbrace{n\cdot}_{Posibles\ col.\ para\ A}\quad\underbrace{(n-1)\cdot}_{Posibles\ col.\ para\ B}\quad\underbrace{(n-2)\cdot}_{Posibles\ col.\ para\ C}\quad\underbrace{(n-1)}_{Posibles\ col.\ para\ D}$$

2. Variaciones, permutaciones y combinaciones

1. **Lanzando un dado 5 veces ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse, si se tiene en cuenta el orden de lanzamiento?**

Sea $D=\{1,2,3,4,5,6\}$ el conjunto de puntuaciones de un dado, un ejemplo de posible resultado es:

$$\underbrace{1}_{1^{\text{a}}\ Tirada}\quad\underbrace{1}_{2^{\text{a}}\ Tirada}\quad\underbrace{2}_{3^{\text{a}}\ Tirada}\quad\underbrace{3}_{4^{\text{a}}\ Tirada}\quad\underbrace{1}_{5^{\text{a}}\ Tirada}$$

Cada resultado es una 5- lista con repetición de elementos de D, por tanto habrá un total de $6^5 = VR_{6,5}$.

2. **Lanzando 5 dados indistinguibles entre sí ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse**

Llamando x_i al número de dados en los que ha salido i puntos para $i = 1.,6$. Tendremos tantos resultados diferentes como el nº de soluciones enteras de

$$\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=5 \\ x_i \geqslant 0\ \forall i=1..,6 \end{array}\right\} = \binom{6+5-1}{5} = \frac{(6+5-1)!}{5!\cdot(6-1)!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{5!}$$

3. **Dadas 5 vocales y 4 consonantes, ¿cuántas palabras de 2 vocales y 2 consonantes distintas se pueden formar teniendo en cuenta que en cada palabra no figuran dos consonantes seguidas?**

Teniendo en cuenta que una palabra debe contener dos vocales, dos consonantes, y su disposición debe ser tal que las dos consonantes no aparezca seguidas, las posibles opciones son 3:

a) Vocal, consonante, vocal, consonante.
b) Consonante, vocal, consonante, vocal.
c) Consonante, vocal, vocal, consonante.

Suponiendo que las vocales y consonantes no pueden repetirse (i.e. si las vocales y consonantes utilizadas son distintas), el número total de palabras que se pueden formar es: $3\cdot V_{5,2}\cdot V_{4,2} = 3\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3 = 720$.

Otra forma: Cada resultado consiste en formar una 2-lista sin repetición de vocales (de $V_{5,2} = 5\cdot 4$ formas diferentes) y en cada una de estas listas dejamos tres huecos para insertar una lista de dos consonantes como vemos en el ejemplo:

$$\underbrace{\overline{}}_{1^{er} hueco}\quad\underbrace{V_1}_{vocal}\quad\underbrace{\overline{C_2}}_{2^{er} hueco}\quad\underbrace{V_4}_{vocal}\quad\underbrace{\overline{C_4}}_{3^{er} hueco}$$

Tendremos un total de:

$$\underbrace{V_{5,2}\times}_{\substack{\textit{listas}\\ \textit{de vocales}}} \quad \underbrace{\binom{3}{2}}_{\substack{\textit{formas de}\\ \textit{elegir huecos}}} \quad \underbrace{\times V_{4,2}}_{\substack{\textit{listas}\\ \textit{de consonantes}}}$$

4. **¿Cuántas sucesiones de ceros y unos, de longitud n, contienen exactamente tres veces el 0?**

$$PR_n^{n-3,3} = \frac{n!}{(n-3)!\cdot 3!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{3!} = \binom{n}{3}$$

5. **Se tienen siete libros azules, cinco negros y tres blancos, distintos entre sí. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden alinear en un estante si han de colocarse juntos los del mismo color?**

   Las posibles agrupaciones de colores son: $P_3 = 3! = 6$.

   Suponiendo que los libros de un mismo color son distinguibles entre sí:

   - El número de reordenaciones posibles de los libros de color azul es: $P_7 = 7! = 5,040$.
   - El número de reordenaciones posibles de los libros de color negro es: $P_5 = 5! = 120$.
   - El número de reordenaciones posibles de los libros de color blanco es: $P_3 = 3! = 6$.

   Luego las distintas opciones de alineación son: $3!\cdot 7!\cdot 5!\cdot 3!$.

6. **Un circuito eléctrico posee 10 interruptores. Teniendo en cuenta que cada interruptor tiene dos posiciones {1, 0}, ¿cuántos estados diferentes puede tener el circuito según la posición de los interruptores? ¿Cuántos estados tienen tres interruptores en posición 1 y el resto en posición 0?**

   Suponiendo que la posición de los interruptores es determiante:

   a) El circuito puede encontrarse en $VR_{2,10} = 2^{10}$ estados distintos.

   b) El número de estados con tres interruptores en posición 1 es:

$$PR_{10}^{7,3} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{3!} = 120$$

7. **¿De cuántas formas diferentes pueden repartirse 5 bolas blancas, 3 rojas y 2 negras en 10 urnas distintas (etiquetadas) de forma que cada urna contenga una bola?**

$$PR_{10}^{5,3,2} = \frac{10!}{5!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{3!\cdot 2!}$$

8. **La cuadrícula de la figura representa calles de una ciudad. Suponiendo que las únicas direcciones permitidas de viaje son hacia el este y hacia el norte, ¿cuántos caminos distintos conducen de A hasta B? ¿cuántos de ellos pasan por C?**

   a) Los caminos de $A = (0,0)$ a $B = (7,5)$ se representan mediante una 13-lista con repetición exacta de 7 símbolos de tipo E, 5 símbolos de tipo N. Por lo que la respuesta es $\binom{7+5}{7,5} = \frac{13!}{7!5!}$

b) Los caminos de A hasta B pasando por $C = (4, 3)$, se forman con la unión de un camino de A a C y un camino de C a B. Por tanto la respuesta es:

$$\underbrace{\binom{4+3}{4,3}}_{\substack{Caminos \\ de\ A\ a\ C}} \cdot \underbrace{\binom{3+2}{3,2}}_{\substack{Caminos \\ de\ C\ a\ B}} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{3!2!}$$

9. **Extrayendo 5 cartas de una baraja de 40 ¿cuántos resultados diferentes pueden obtenerse:**

   a) **con reemplazamiento**

   b) **sin reemplazamiento (el orden de aparición es irrelevante).**

   a) Podemos interpretar el enunciado de dos formas distintas en función de si creemos que el ámbito de la indicación: "el orden de aparición es irrelevante"; se aplica a los dos apartados, a) y b), o exclusivamente al segundo apartado, b).

   - Suponiendo que el orden en el que aparecen las cartas extraídas es relevante, y que cada carta extraída se devuelve a la baraja, $VR_{40,5} = 40^5$.
   - Por otro lado, si suponemos que la puntualización realizada en el apartado b) sobre el orden de aparición de las cartas se refiere a ambos apartados (i.e. el orden de aparición de las cartas extraídas es irrelevante), los resultados que podemos obtener son: $CR_{40,5}$.

   b)

$$C_{40,5} = \binom{40}{5} = \frac{40!}{5! \cdot 35!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36}{5!}$$

10. **Un banco tiene que elegir 5 cargos directivos: director, subdirector, interventor, cajero y cobrador, entre 8 personas, de las cuales 3 son hombres A, E, O y 5 mujeres X, Y, Z, V, W ¿De cuántas formas puede hacerse la elección si:**

    a) **Los hombres A y E no pueden estar juntos en la misma elección.**

    b) **Se eligen los tres hombres.**

    c) **Se eligen tres mujeres y dos hombres.**

    d) **Se eligen tres mujeres al menos?**

    a) Podemos descomponer las posibles opciones en 3 casos:

    - El hombre A está en la elección de cualquiera de los cargos directivos y E no, luego las opciones son: $\binom{6}{4}5!$.
    - En la situación contraria, el hombre E está en la elección de cualquiera de los cargos directivos mientras que A no, en este caso las opciones vuelven a ser: $\binom{6}{4}5!$.
    - Finalmente queda la situación en la que ni A ni E están en la elección de cualquiera de los cargos directivos, cuyas opciones son: $\binom{6}{5}5!$.

    Luego la elección donde A y E no están al mismo tiempo en dos cargos directivos puede hacerse de $\binom{6}{4}5! + \binom{6}{4}5! + \binom{6}{5}5!$ formas distintas.

    b) $\binom{5}{2}5!$.

c) $\binom{5}{3}\binom{3}{2}5!$.

d) $(\binom{5}{3}\binom{3}{2}+\binom{5}{4}\binom{3}{1}+\binom{5}{5}\binom{3}{0})5!$

11. **El consejo de administración de una empresa está compuesto por 5 personas P1, P2, P3, P4, P5. Se somete a votación secreta la aprobación de un proyecto y nadie puede abstenerse pero sí puede votar en blanco. ¿Cuántos resultados distintos se pueden extraer de la urna una vez efectuada la votación? Considerando que se aprueba el proyecto con al menos 3 votos favorables ¿cuántos resultados de los anteriores aprueban el proyecto?**

Los posibles votos por persona son 3: aprobado (A), rechazado (R), y voto en blanco (N). Suponemos que el voto es secreto, y por lo tanto no se conoce el orden de los votos.

a) Llamando x_1 al número votos (A), x_2 al número votos (R), x_3 al número votos (B), tendremos tantos resultados diferentes como el nº de soluciones enteras de

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=5 \\ x_i \geqslant 0 \ \forall i=1..,3 \end{array} \right\} = \binom{5+3-1}{5} = \frac{(3+5-1)!}{5!\cdot 2!} = \frac{7\cdot 6}{2} = 21$$

b) Considerando que un proyecto se aprueba con al menos 3 votos favorables, los posibles resultados que permiten aprobar un proyecto son:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3=5 \\ x_1 \geqslant 3, x_i \geqslant 0 \text{ si } i=2,3 \end{array} \right\} = \binom{2+3-1}{2} = 6$$

Estas 6 opciones serían: {A, A, A, R, R}, {A, A, A, R, N}, {A, A, A, N, N}, {A, A, A, A, R}, {A, A, A, A, N}, {A, A, A, A, A}.

12. **Se tienen 5 sobres y 5 cartas y se distribuyen al azar las cartas en los sobres. ¿De cuántas formas se pueden distribuir para que no haya ninguna coincidencia? ¿Y para que haya una coincidencia? ¿Y para que haya dos coincidencias? ... ¿Y para que haya cinco?** Hecho en clase.

13. **En un tablero de ajedrez de 8 x 8 casillas, ¿de cuántas formas distintas se pueden colocar 8 torres iguales de forma que ninguna esté en la diagonal ni se puedan comer entre ellas?**

Puesto que todas las torres son iguales, i.e. indistinguibles entre sí, no influye el orden en el que colocamos las mismas. Puesto que una torre come en las direcciónes vertical y horizontal con respecto a la posición de la misma, deducimos que todas y cada una de las filas del tablero deben estar ocupadas por una única torre (de igual forma ocurre con las columnas). Podemos por lo tanto suponer que rellenamos el tablero colocando una torre por fila, comenzando desde la primera fila, y siguiendo secuencialmente las siguientes. Colocar aquí significa asignar una columna a cada fila para determinar la casilla donde poner cada torre, tendremos por tanto que cada configuración es una aplicación biyectiva (sólo una torre por columna) del conjunto de las filas en el conjunto de las columnas. Un ejemplo de dicha configuración de torres se representa en la siguiente lista sin repetición:

2	1	4	3	6	5	8	7
Columna de torre en 1^{a} fila	Columna de torre en 2^{a} fila	Columna de torre en 3^{a} fila	...			...	Columna de torre en 8^{a} fila

que se corresponde con el siguiente tablero

	T						
T							
			T				
		T					
					T		
				T			
							T
						T	

Si no tenemos inicialmente restricción alguna sobre la diagonal, tendríamos todas las 8-listas sin repetición del conjunto de las 8 columnas, esto es las permutaciones de 8: $P_8 = 8!$.

Ahora bien, supongamos que no podemos colocar ninguna torre en una de las diagonales del tablero, esto es que a la fila $i-$ésima no se le puede asignar la columna i-ésima. El conjunto de configuraciones posibles es el de los desórdenes de 8:

$$R = \{g : \{1, 2, 3..,8\} \longrightarrow \{1, 2, 3..,8\} \text{ tal que } g(i) \neq i\}$$

Luego hay $d_8 = 8!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!}\right)$.

14. **¿De cuántas formas distintas se pueden escoger cinco cartas de una baraja de 52 cartas de modo que se tenga al menos una carta de cada palo?**

    Puesto que la baraja tiene un total de 52 cartas, suponiendo que existen 4 palos distintos en la baraja, A_1, A_2, A_3 y A_4, tenemos que cada palo contiene $52/4 = 13$. Suponemos que el orden de aparición de las cartas es irrelevante. En cada elección de 5 cartas tiene que haber dos del mismo palo, si fijamos el palo que se repite hay $\binom{13}{2} \times \binom{13}{1} \times \binom{13}{1} \times \binom{13}{1}$, como hay 4 palos, tenemos un total de:
    $4 \times \binom{13}{2} \times \binom{13}{1} \times \binom{13}{1} \times \binom{13}{1}$

15. **¿Cuántas palabras de 13 letras pueden formarse con las letras de la palabra CLASIFICACIÓN?**

    Agrupamos las letras repetidas y obtenemos: CCC, L, AA, S, III, F, O, N.

$$PR_{13}^{3,1,2,1,3,1,1,1} = \frac{13!}{3! \cdot 1! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 3! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!}$$

16. **Un ascensor de un centro comercial parte del sótano con 5 pasajeros y se detiene en 7 pisos. ¿De cuántas maneras distintas pueden descender los pasajeros? ¿Y con la condición de que dos pasajeros no bajen en el mismo piso?**

    a) Los pasajeros son distintos y los pisos también. Por lo tanto es una distribución de 5 objetos diferentes (pasajeros) en 7 cajas diferentes (pisos).

$$\underbrace{1}_{Pasajero1} \quad \underbrace{1}_{Pasajero2} \quad \underbrace{2}_{Pasajero3} \quad \underbrace{3}_{Pasajero4} \quad \underbrace{7}_{Pasajero5}$$

    Hay un total de 7^5 listas con repetición correspondientes a las distribuciones.

    b) Si no hay repetición de piso, hay un total de $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$.

17. **¿De cuántas maneras se pueden distribuir 10 canicas idénticas entre 6 niños? ¿Y si las canicas son todas ellas de distintos colores?**

   a) Definimos x_i como el número de canicas que recibe el niño i, de tal forma tenemos tantas formas como soluciones enteras de

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10 \\ x_i \geqslant 0 \ \forall i = 1..,6 \end{array} \right\} = \binom{10+6-1}{10} = \frac{15!}{5! \cdot 10!}$$

   b) Si las canicas son todas distintas, son distribuciones de 10 objetos diferentes (canicas) en 6 cajas diferentes (niños), habiendo un total de : 6^{10} listas con repetición correspondientes a las distribuciones..

18. **Determina el número de soluciones enteras de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 32$ donde:**

   ***a*)** $x_i \geq 0 \quad 1 \leq i \leq 4$

   ***b*)** $x_i > 0 \quad 1 \leq i \leq 4$

   ***c*)** $x_1, x_2 \geq 5$**;** $x_3, x_4 \geq 7$

   ***d*)** $x_i \geq 8 \quad 1 \leq i \leq 4$

   ***e*)** $x_i \geq -2 \quad 1 \leq i \leq 4$

   ***f*)** $x_1, x_2, x_3 > 0$**;** $0 < x_4 \leq 25$**.**

   a) $\binom{32+4-1}{32} = \frac{35!}{3! \cdot 32!}$.

   b) $\binom{28+4-1}{28} = \frac{31!}{3! \cdot 28!}$.

   c) $\binom{8+4-1}{8} = \frac{11!}{3! \cdot 8!}$.

   d) $\binom{0+4-1}{0} = \frac{3!}{3! \cdot 0!} = 1$.

   e) Tras efectuar el cambio
   $z_i = x_i + 2 \ \forall i = 1, 2, 3, 4$ tenemos el sistema equivalente:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 40 \\ 0 \leq z_i \ \forall i = 1..,4 \end{array} \right\}$$

   que tiene un total de: $\binom{40+4-1}{40} = \frac{43!}{3! \cdot 40!}$.

   f) Tras efectuar el cambio
   $z_1 = x_1 - 1$, $z_2 = x_2 - 1$, $z_3 = x_3 - 1$, $z_4 = x_4 - 1$
   obtenemos el sistema :

$$\text{R=}\left\{ \text{SE} \left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 28 \\ 0 \leq z_i \forall i = 1..,4 \text{ y } z_4 \leq 24 \end{array} \right\} \right\}$$

   Considerando el conjunto:

$$\text{X=}\left\{ \text{SE} \left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 28 \\ 0 \leq z_i \forall i = 1..,4 \end{array} \right\} \right\} \text{ con } |X| = \binom{31}{28}$$

El cardinal de la única prohibición A es:

$$|A| = \left| \left\{ \text{SE} \left\{ \begin{array}{l} z_1 + z_2 + z_3 + z_4 = 28 \\ 0 \leq z_i \forall i = 1..,3 \text{ y } 25 \leq z_4 \end{array} \right\} \right\} \right| = \binom{6}{3}$$

El resultado es:

$$|R| = |X| - |A_1| = \binom{31}{28} - \binom{6}{3}$$

19. **¿Cuántos números hay en el conjunto {1, 2, ..., 1000} tales que la suma de sus dígitos sea 5?**

Las posibles combinaciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 5 \\ 0 \leq d_i \leq 9 \ \forall i = 1..,4 \end{array} \right\} = \binom{5+4-1}{5} = \frac{(6+5-1)!}{5! \cdot (6-1)!}$$

20. **Responda:**

a) **¿Cuántos números enteros entre 1000 y 9999 satisfacen que la suma de sus digitos es 9?**

b) **¿Cuántos números enteros de los hallados en a) tienen todos sus dígitos distintos de cero?**

a) Las posibles soluciones son números con expresión en base 10 $d_1 d_2 d_3 d_4$ y con las restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 9 \\ 1 \leq d_1 \leq 9 \text{ y } 0 \leq d_i \leq 9 \forall i = 2..,4 \end{array} \right\}$$

equivalente a

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 8 \\ 0 \leq d_1 \leq 8 \text{ y } 0 \leq d_i \leq 9 \forall i = 2..,4 \end{array} \right\}$$

El número de soluciones enteras es

$$\frac{(8+4-1)!}{8! \cdot (4-1)!} = \frac{11!}{8! \cdot 3!}$$

b) Modificando las restricciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_1 + d_2 + d_3 + d_4 = 9 \\ 1 \leq d_i \leq 9 \forall i = 1..,4 \end{array} \right\}$$

$$\frac{(5+4-1)!}{5! \cdot (4-1)!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!}$$

21. **Se considera el código, sobre el alfabeto $B = \{0, 1\}$, formado por las palabras de 16 dígitos en las que el número de unos es múltiplo de 4. ¿Cuántas palabras distintas puede haber?**

- Palabras con 0 unos: $\binom{16}{0}$.
- Palabras con 4 unos: $\binom{16}{4}$.
- Palabras con 8 unos: $\binom{16}{8}$.
- Palabras con 12 unos: $\binom{16}{12}$.
- Palabras con 16 unos: $\binom{16}{16}$.

En total $\binom{16}{0}+\binom{16}{4}+\binom{16}{8}+\binom{16}{12}+\binom{16}{16}$.

22. **Dados n puntos sobre una circunferencia, se trazan todos los segmentos que determinan entre sí. ¿Cuantos hay? Suponiendo que no hay tres segmentos con un punto en común, ¿cuál es el número de puntos de intersección en el interior de la circunferencia?**

    a) Como dos puntos determinan un único segmento, hay un total de $\binom{n}{2}$ segmentos.

    b) Con cuatro puntos sólo se pueden formar dos segmentos que se corten en un punto dentro de la circunferencia, además como no hay tres segmentos con un punto en común,podemos afirmar que cuatro puntos en la circunferencia determinan un único punto en el interior que es la intersección del dos segmentos. Por tanto hay un total de $\binom{n}{4}$ puntos de intersección.

23. **El número de manos de 5 cartas de una baraja de 52 cartas que contienen al menos tres picas, no es $C_{13,3}\times C_{49,2}$. ¿Cuál es la respuesta correcta?**

    $\binom{13}{3}\times\binom{39}{2}+\binom{13}{4}\times\binom{39}{1}+\binom{13}{5}\times\binom{39}{0}$.

24. **¿Cuál es el número de cuaternas (a,b,c,d) de números enteros que satisfacen $0<a<b<c<d<20$?**

    Cada subconjunto de 4 elementos del conjunto $A=\{1,2,3,...,19\}$ admite una ordenación creciente posible, por ejemplo {16,2,9,3} sólo admite la ordenación: $0<2<3<9<16<20$.

    Por lo tanto la respuesa es $\binom{19}{4}$

25. **¿De cuántas formas se pueden elegir 4 parejas entre 30 personas?**

    Cada equipo de 4 parejas estará formado‘por 8 personas

    a) Primera forma: elegimos sucesivamente (con orden) parejas y luego quitamos el orden a las parejas,

{2 , 3}	{5, 6}	{7, 8}	{20, 10}
1ª *pareja*	2ª *pareja*	3ª *pareja*	4ª *pareja*

    $$\underbrace{\binom{30}{2}\cdot}_{\substack{\text{elegir la}\\ \text{1ª pareja}}}\quad\underbrace{\binom{28}{2}\cdot}_{\substack{\text{elegir la}\\ \text{2ª pareja}}}\quad\underbrace{\binom{26}{2}\cdot}_{\substack{\text{elegir la}\\ \text{3ª pareja}}}\quad\underbrace{\binom{24}{2}}_{\substack{\text{elegir la}\\ \text{4ª pareja}}}\quad\underbrace{\frac{1}{4!}\cdot}_{\substack{\text{quitar la}\\ \text{etiqueta a las parejas}}}$$

    b) Habrá que elegir 8 entre las 30, de $\binom{30}{8}$ formas diferentes. En cada uno de estos grupos de 8, como por ejemplo $A=\{2,3,5,6,7,8,20,10\}$, formamos parejas de la siguiente manera:
    Considerando cada lista ordenada $(2,3,5,6,7,8,20,10)$,emparejamos según el orden de la lista de la siguiente forma:

2	3	5	6	7	8	20	10
1ª *pareja*		2ª *pareja*		3ª *pareja*		4ª *pareja*	

    Pero teniendo en cuenta que las parejas no tienen etiqueta (no tienen orden) ni tampoco están ordenados los miembros de cada pareja:

    $$\underbrace{2\ \ 3}_{pareja}\ \underbrace{5\ \ 6}_{pareja}\ \underbrace{7\ \ 8}_{pareja}\ \underbrace{20\ \ 10}_{pareja} = \underbrace{8\ \ 7}_{pareja}\ \underbrace{3\ \ 2}_{pareja}\ \underbrace{20\ \ 10}_{pareja}\ \underbrace{5\ \ 6}_{pareja}$$

Tendremos un total de

$$\underbrace{\binom{30}{8}\times}_{\substack{\text{elegir las 8}\\ \text{personas}}} \quad \underbrace{8!\times}_{\substack{\text{ordenar las 8}\\ \text{personas}}} \quad \underbrace{\frac{1}{4!}\times}_{\substack{\text{quitar el orden}\\ \text{a las parejas}}} \quad \underbrace{\frac{1}{(2!)^4} =}_{\substack{\text{quitar el orden}\\ \text{dentro de la parejas}}} \quad \binom{30}{8}\times\frac{8!}{4!\,(2!)^4}$$

$\binom{30}{8}\cdot\dfrac{8!}{4!\cdot(2!)^4}$

26.

27. **Calcular el número de sucesiones que se pueden formar con 3 A, 5 B y 8 C. ¿Y si no puede haber dos B consecutivas? ¿Y si no hay dos letras iguales consecutivas?**

a)

$$PR_{16}^{3,5,8}=\binom{16}{3,5,8}=\frac{16!}{3!\cdot 5!\cdot 8!}$$

b) Cada resultado consiste en formar una 16-lista con repetición de manera que no puede haber dos B's seguidas, para ello consideraremos una lista con repetición de 8 C's y 3 A's (de $\binom{11}{8,3}$ formas diferentes) y en cada una de estas listas dejamos 12 huecos para elegir 5 de ellos (de $\binom{12}{5}$ maneras diferentes) e insertar las B's como vemos en el ejemplo:

$$\underbrace{\text{B}}_{1^{er}hueco.}\quad A\quad \underbrace{\text{B}}_{2^{o}h.}\quad C\quad \underbrace{\text{B}}_{3^{er}h.}\quad A\quad \underbrace{\text{B}}_{4^{o}h.}\quad A\quad \ldots\quad \underbrace{\ }_{11^{o}h.}\quad C\quad \underbrace{\text{B}}_{12^{o}hueco}$$

El número total de diferentes listas $\binom{11}{8,3}\times\binom{12}{5}$

c) Si no hay letras iguales seguidas consideramos tres casos:

1) La lista empienza y termina por C: en este caso hay 7 huecos entre las C's, para colocar el resto de letras que son 8 en total, por tanto tenemos que elegir un hueco para insertar AB o BA y ordenar el resto de letras en los 6 huecos que quedan. El total es de $2\times\binom{7}{2}\times\binom{6}{2,4}$
2) La lista empienza por C y no termina en C: en este caso hay 8 huecos entre las C's, para colocar el resto de letras que son 8 en total, por tanto el total es de $\binom{8}{3,5}$
3) La lista no empienza por C y termina en C: en este caso hay 8 huecos entre las C's, para colocar el resto de letras que son 8 en total, por tanto el total es de $\binom{8}{3,5}$

La solución es: $2\times\binom{7}{2}\times\binom{6}{2,4}+\binom{8}{3,5}+\binom{8}{3,5}$

28. **¿Cuántas sucesiones de 10 símbolos pueden formarse con 4 A, 4 B, 4 C y 4 D si cada símbolo debe aparecer, al menos, dos veces?** Distinguimos dos casos

a) Hay un símbolo que se repite 4 veces. Tenemos que elegir el símbolo que se repite 4 veces y luego ordenar la lista con repetición. En este caso hay $\binom{4}{1} \times \binom{10}{4,2,2,2}$

b) Hay dos símbolos que se repiten 3 veces. Tenemos que elegir el los dos tipos de símbolo que se repite 3 veces y luego ordenar la lista con repetición. En este caso hay $\binom{4}{2} \times \binom{10}{3,3,2,2}$

La solución es: $\binom{4}{1} \times \binom{10}{4,2,2,2} + \binom{4}{2} \times \binom{10}{3,3,2,2}$

29. **Una caravana publicitaria consta de 6 coches y 6 furgonetas, siendo todos los vehículos de diferente color. ¿De cuántas formas diferentes puede organizarse la fila de la caravana, con la condición de que no circulen dos furgonetas juntas? Si se suprimen dos furgonetas, ¿cuántas caravanas diferentes se pueden formar con la condición anterior?**

a) Cada resultado consiste en formar una 6-lista sin repetición de coches (de 6! formas diferentes) y en cada una de estas listas dejamos 7 huecos para insertar una lista de 6 furgonetas como vemos en el ejemplo:

	C_1	F_2	C_2	F_1	C_3	F_3	C_4	F_5	C_5	F_4	C_6	F_6
1^{er}*hueco*	*Coche*	2º *h.*	*Coche*	3^{er}*h.*	*Coche*	...	*Coche*	...	*Coche*	...	*Coche*	7º *h.*

Tendremos un total de:

$$\underbrace{6!\cdot}_{\substack{\textit{ordenar}\\ \textit{coches}}} \quad \underbrace{\binom{7}{6}}_{\substack{\text{formas de}\\ \text{elegir 6 hueco}}} \quad \underbrace{\cdot 6!}_{\substack{\textit{ordenar}\\ \textit{furgonetas}}}$$

b) $6! \cdot \binom{7}{4} \cdot 4!$.

30. **En un centro de ensenanza se reciben solicitudes de ingreso, que se atienden según las calificaciones de las siguientes asignaturas: Matemáticas, Física, Química e Inglés. Cada asignatura tiene una puntuación entera entre 5 y 10.**

Las posibles puntuaciones son $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, luego el número de posibles puntuaciones por asignatura es $|A| = 6$.

a) Cada expediente es una lista de notar que se pueden repetir:

$$\underbrace{5}_{\text{Matemáticas}} \quad \underbrace{5}_{\text{Física}} \quad \underbrace{5}_{\text{Química}} \quad \underbrace{7}_{\text{Inglés}}$$

El número total de listas con repetición es : 6^4.

b) Para que la nota media valga exactamente 7, las notas de las 4 asignaturas deben sumar $7 \cdot 4 = 28$. Llamamos x_1, x_2, x_3 y x_4 a las notas de las asignaturas de Matemáticas, Física, Química e Inglés respectivamente. Por lo tanto, el problema es calcular el el cardinal del siguiente conjunto:

$$R = \left\{ \text{SE} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 28 \\ 5 \leq x_i \leq 10 \forall i = 1..,4 \end{array} \right\} \right\}$$

tras efectuar el cambio
$z_1 = x_1 - 5,\ z_2 = x_2 - 5,\ z_3 = x_3 - 5,\ z_4 = x_4 - 5$
tenemos:

$R = \left\{ \text{SE } \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 0 \le z_i \le 5 \forall i = 1..,4 \end{array} \right\} \right\}$
$X = \left\{ \text{SE } \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 0 \le z_i \forall i = 1..,4 \end{array} \right\} \right\}$ con $\lvert X\rvert = \binom{11}{8}$

Sean los conjuntos de prohibiciones:

$$A_1 = \{\text{SE de} \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_1 \text{ y si } j \neq 1 \quad z_j \ge 0 \end{array} \right. \}$$

$$A_2 = \{\text{SE de} \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_2 \text{ y si } j \neq 2 \quad z_j \ge 0 \end{array} \right. \}$$

$$A_3 = \{\text{SE de} \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_3 \text{ y si } j \neq 3 \quad z_j \ge 0 \end{array} \right. \}$$

$$A_4 = \{\text{SE de} \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_4 \text{ y si } j \neq 4 \quad z_j \ge 0 \end{array} \right. \}$$

con:

$\lvert A_1\rvert = \binom{5}{2} = \lvert A_2\rvert = \lvert A_3\rvert = \lvert A_4\rvert$		
$\lvert A_1 \cap A_2\rvert =$	$\{\text{SE de} \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_1, z_2 \text{ y si } k=3,4 \quad z_k \ge 0 \end{array} \right. \}$	$= \lvert\emptyset\rvert = 0$
$\lvert A_1 \cap A_3\rvert = \lvert\{\text{SE de} \{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_1,\ z_3 \text{ y si } k=2,4 \quad z_k \ge 0 \end{array} \} = \lvert\emptyset\rvert = 0$		
$\lvert A_1 \cap A_4\rvert = \lvert\{\text{SE de} \{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_1,\ z_4 \text{ y si } k=2,3 \quad z_k \ge 0 \end{array} \} = \lvert\emptyset\rvert = 0$		
$\lvert A_2 \cap A_3\rvert =$	$\{\text{SE de} \left\{ \begin{array}{l} z_1+z_2+z_3+z_4=8 \\ 6 \le z_2, z_3 \text{ y si } k=1,4 \quad z_k \ge 0 \end{array} \right. \}$	$= \lvert\emptyset\rvert = 0$
$\lvert A_2 \cap A_4\rvert = \lvert A_3 \cap A_4\rvert = \lvert A_1 \cap A_2 \cap A_3\rvert = \lvert A_1 \cap A_2 \cap A_4\rvert = \lvert A_1 \cap A_3 \cap A_4\rvert$		
$= \lvert A_2 \cap A_3 \cap A_4\rvert = \lvert A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4\rvert = \lvert\emptyset\rvert = 0$		

El resultado es:

$$\lvert R\rvert = \lvert X\rvert - \lvert A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4\rvert = \binom{11}{8} - 4 \cdot \binom{5}{2}$$